

# Anales de Mecánica de la Fractura

TEXTO DE LAS COMUNICACIONES PRESENTADAS EN EL

**XXXI ENCUENTRO DEL  
GRUPO ESPAÑOL DE FRACTURA**

---

**Número 31**

**San Lorenzo del Escorial**

2, 3 y 4 de abril de 2014

# Anales de Mecánica de la Fractura

Texto de las comunicaciones presentadas en el

## XXXI ENCUENTRO DEL GRUPO ESPAÑOL DE FRACTURA

---

2, 3 y 4 de abril de 2014  
San Lorenzo del Escorial, Madrid

©ANALES DE MECÁNICA DE LA FRACTURA

Editado por la Secretaría del Grupo Español de Fractura

"Reservados todos los derechos para todos los países. Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de la cubierta puede ser reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea electrónico o de cualquier otro, sin previa autorización escrita por parte de la Editorial"

Depósito legal: B-9110-2014

I.S.S.N: 0213-3725

Coordinación Editorial: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) Barcelona

Impresión: Artes Gráficas Torres. Huelva, 9 – 08940 Cornellá de Llobregat, Barcelona

Fecha impresión: Abril 2014

# CARACTERIZACIÓN PROBABILÍSTICA DE VIDRIO MEDIANTE DIFERENTES TIPOS DE ENSAYOS

A. Ramos<sup>1,\*</sup>, F. Pelayo<sup>1</sup>, M.J. Lamela<sup>1</sup>, C. Pryzbilla<sup>1</sup>, A. Fernández Canteli<sup>1</sup>  
C. Huerta<sup>2</sup>, A. Pacios<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Construcción e Ingeniería de Fabricación.  
Universidad de Oviedo. Campus de Viesques. 33203 Gijón, España.  
\* E-mail: ramosfalberto@uniovi.es

<sup>2</sup>Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales.  
E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid.  
C/ José Gutiérrez Abascal, 2, 28006 Madrid, España.

## RESUMEN

El vidrio no puede ser tratado como un material estructural convencional desde el punto de vista de la resistencia mecánica. Su naturaleza, como material frágil, junto con la inevitable presencia de microfisuras en su superficie y las consecuencias de accidentes por posibles fallos, exigen métodos rigurosos que garanticen un cálculo seguro de los elementos estructurales de vidrio, cuya resistencia a rotura depende en gran medida del tamaño del elemento y del tipo de carga a la que está sometido. Por lo tanto, su cálculo debe basarse en conceptos probabilísticos y en criterios de mecánica de la fractura, en sustitución de un cálculo convencional de vidrio según tablas deducidas de programas experimentales y posterior aplicación del concepto de tensiones admisibles. Con el fin de analizar y comparar las características mecánicas de vidrios templados, termoendurecidos y recocidos, se realizó un amplio programa experimental de ensayos de flexión a cuatro puntos y de anillos concéntricos de pequeña superficie, seguido de un ajuste de los resultados mediante una función de distribución triparamétrica de Weibull.

## ABSTRACT

Glass cannot be handled as a conventional structural material from the point of view of the mechanical strength. Its nature as brittle material, together with the inevitable presence of micro-cracks on its surface and the consequences of eventual failures, demand rigorous methods to achieve a safe design for glass elements, whose stress resistance is very much dependent on the integrity of its surface, element size and loading pattern. Thus, its design must rely on probabilistic concepts and fracture mechanics criteria, substitutive of the conventional glass design based on charts derived from experimental programs and subsequent application of the admissible stress concept. In order to analyze and compare the strength characteristics of tempered, heat-strengthened and annealed glass, a large experimental programme based on four-point bending and coaxial double ring tests was performed and the results were fitted using a three-parameter Weibull cumulative distribution function.

**PALABRAS CLAVE:** Vidrio estructural, Programa experimental, Análisis probabilístico.

## 1. INTRODUCCIÓN

El uso de elementos estructurales de vidrio se ha incrementado y diversificado en la industria de la construcción, combinando los conceptos de sostenibilidad, funcionalidad y estética con su empleo en cubiertas, fachadas e interiores.

En la actualidad prácticamente todos los edificios altos o singulares cuentan con la presencia de vidrio en sus estructuras. Sin embargo, hasta el momento no se cuenta con una norma de cálculo de vidrio estructural basada en criterios probabilísticos o semiprobabilísticos

y la demanda arquitectónica va muy por delante del dimensionamiento que, en muchos casos, se fundamenta únicamente en la experiencia y en la aplicación de reglas básicas empíricas.

A pesar de los estudios realizados y de los avances alcanzados persisten algunos puntos críticos, que impiden un conocimiento real del estado límite del vidrio bajo diferentes tipos de sollicitación. Por ello, resulta necesario el desarrollo de una norma global de vidrio que, considerando sus características específicas como material frágil con presencia de defectos, permita su aplicación en condiciones de seguridad y fiabilidad

similares a las de otros materiales estructurales convencionales, como el acero, el hormigón y la madera [1,2,3,4].

En este trabajo se desarrolla una metodología probabilística general que permite evaluar y comparar la caracterización mecánica de diferentes tipos de vidrio monolítico bajo sollicitación de flexión a 4 puntos y de anillos concéntricos de pequeña superficie de sollicitación, ajustando los resultados experimentales a funciones de distribución (fdd) triparamétricas de Weibull e incluyendo el efecto de escala a través de la consideración del área efectiva de cada ensayo.

## 2. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

### 2.1 Materiales

En el programa experimental se ensayaron 30 probetas por cada ensayo y cada uno de los tres tipos de vidrio monolítico utilizado: recocido, termoendurecido y templado. Con el fin de simplificar la representación gráfica de resultados, los tres materiales se denominarán a partir de ahora por sus iniciales en inglés, es decir, A (Annealed) para vidrio recocido, H (Heat-strengthened) para vidrio termoendurecido y T (Tempered) para vidrio templado.

### 2.2 Ensayos

Para la caracterización de la resistencia de los vidrios estudiados se programaron ensayos de flexión a cuatro puntos (4P) y ensayos de anillos concéntricos con pequeña superficie de sollicitación (CS). En ambos casos los ensayos se realizaron hasta la rotura y con control de desplazamiento, aplicando una velocidad de carga correspondiente a un incremento de tensión de 2 MPa/s, tal como indica la normativa UNE-EN\_1288-3:2000 y UNE-EN\_1288-5:2000 [5,6].

Los ensayos de flexión a 4 puntos se llevaron a cabo en un marco de ensayos con un servoactuador Series AH 100/250 de Walter+Bai AG de 100 kN de carga máxima y probetas de 1100 mm de largo, 360 mm de ancho y 5 mm de espesor, mientras que para los ensayos de anillos concéntricos se utilizó una máquina MTS Bionix Uniaxial con una célula de carga de 15 kN, un utillaje diseñado específicamente para este ensayo y probetas cuadradas de 250 mm de lado y 5 mm de espesor.

La tabla 1 recoge las dimensiones características de los dos tipos de ensayos realizados, siendo  $L_0$  y  $L_1$  las distancias entre apoyo y carga y entre cargas, respectivamente, en el ensayo de flexión a cuatro puntos y  $r_1$  y  $r_2$  los radios de los anillos de carga y soporte, respectivamente, en el ensayo de anillos concéntricos, tal como se indica en las figuras 1 y 2.

Tabla 1. Dimensiones características de los ensayos.

Ensayo	Dimensiones [mm]	
4P-A, 4P-H, 4P-T	$L_0=400$	$L_1=200$
CS-A, CS-H, CS-T	$r_1=30$	$r_2=80$

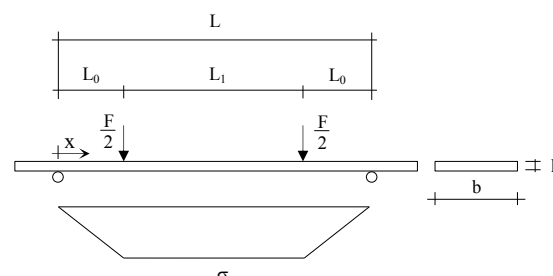


Figura 1. Ensayo de flexión a 4 puntos.

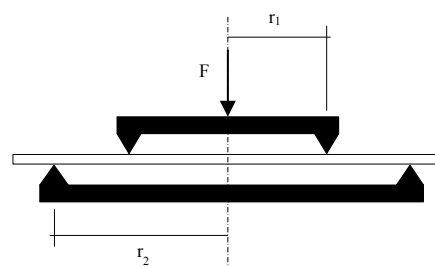


Figura 2. Ensayo de anillos concéntricos con pequeña superficie de sollicitación.

## 3. MODELO PROBABILÍSTICO

En la caracterización mecánica del vidrio la presencia de defectos superficiales distribuidos aleatoriamente, tanto en tamaño como en orientación, y la dispersión de resultados característica de los materiales cerámicos obligan a recurrir a métodos basados en criterios probabilísticos.

En 1939 Weibull [7] desarrolló una formulación para describir estadísticamente la rotura frágil en componentes sometidos a tensiones uniaxiales de tracción. A partir de entonces surgiendo modelos para sollicitación multiaxial basados en la teoría del eslabón más débil [8]. Entre ellos, los más utilizados internacionalmente son los de la tensión normal promediada [9], el Principio de Acciones Independientes, conocido como PIA, que fue propuesto por Barnett [10] en 1967 y Freudenthal [11] en 1968, el modelo de Batdorf de densidad de defectos [12] y el modelo de resistencia multiaxial desarrollado por Evans en 1978 [13].

La probabilidad de fallo de un área  $\Delta A$  tensionada uniaxial y uniformemente, como se muestra en la figura 3, se expresa como función de distribución (fdd)

triparamétrica de Weibull de valores mínimos, según la ecuación:

$$F_{\Delta A}(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{\sigma - \lambda}{\delta} \right)^\beta \right\}; \sigma > \lambda \quad (1)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de localización,  $\beta$  es el parámetro de forma y  $\delta$  es el parámetro de escala.

Dado que el tamaño del área  $\Delta A$  es arbitrario y se puede asimilar al de un elemento finito perteneciente a los modelos de cálculo utilizados en la simulación de los ensayos realizados, en este trabajo se adoptó un valor pequeño e igual a  $100 \text{ mm}^2$  para  $\Delta A$ .

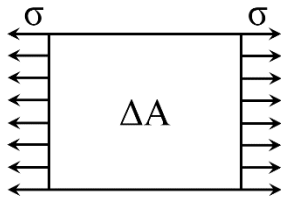


Figura 3. Área tensionada uniaxialmente,  $\Delta A$ .

Particularizando para el ensayo de flexión a 4 puntos indicado en la figura 1, si la superficie bajo tensión de la probeta tipo viga se divide en celdas de área  $\Delta A_i = n \cdot \Delta A$  ( $n \in \mathbb{R}^+$ ) y  $P_{s,\Delta A}$  es la probabilidad de supervivencia para  $\Delta A$ , la probabilidad de supervivencia  $P_{s,i}$  para cada  $\Delta A_i$  se calcula mediante la expresión:

$$P_{s,i} = [P_{s,\Delta A}]^n = [1 - F_{\Delta A}(\sigma)]^{\frac{\Delta A_i}{\Delta A}} = \exp \left\{ - \frac{\Delta A_i}{\Delta A} \left( \frac{\sigma - \lambda}{\delta} \right)^\beta \right\}; \sigma \geq \lambda \quad (2)$$

Bajo el supuesto de validez del principio del eslabón más débil y la independencia entre las distribuciones estadísticas de las celdas, la probabilidad de fallo de toda la viga se determina por:

$$P_{f,viga}(\sigma) = 1 - \prod_i P_{s,i} \quad (3)$$

y siguiendo el método propuesto por Przybilla et al. [14], se obtiene la formulación mejorada de la fdd primaria de Weibull, teniendo en cuenta el efecto de escala:

$$P_{f,viga} = 1 - \exp \left[ - \frac{b}{\Delta A} \left( \frac{2 \cdot L_0 \cdot (\sigma - \lambda)}{\sigma \cdot (\beta + 1)} + L_1 \right) \right] \cdot \left[ \left( \frac{\sigma - \lambda}{\delta} \right)^\beta \right] \quad (4)$$

Como en el ensayo de flexión considerado (ver figura 1), la tensión uniaxial es variable a lo largo de la longitud de la viga, salvo en el tramo central entre cargas, la distribución de las tensiones resistentes obtenidas experimentalmente para cada material se debe referir a un área efectiva,  $A_{ef}$ , tal que sometida a la tensión máxima constante  $\sigma$ , presente la misma probabilidad de rotura que la viga completa.

Por tanto, si la probabilidad de fallo para  $A_{ef}$  es:

$$P_{f,A_{ef}}(\sigma) = 1 - \exp \left[ - \frac{A_{ef}}{\Delta A} \left( \frac{\sigma - \lambda}{\delta} \right)^\beta \right] \quad (5)$$

e igualando las ecuaciones (4) y (5), se obtiene directamente la expresión siguiente del área efectiva del ensayo de flexión a 4 puntos:

$$A_{ef} = w \cdot \left[ \frac{2 \cdot L_0}{(\beta + 1)} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda}{\sigma} \right) + L_1 \right] \quad (6)$$

Por otra parte, con el fin de reducir el estado biaxial de tensiones del ensayo de anillos concéntricos a un estado uniaxial, en este trabajo se optó por calcular la tensión equivalente propuesta en el criterio PIA [10],  $\sigma_{e,PIA}$ , en función de los valores no negativos de las tensiones principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ , y  $\sigma_{III}$ , obtenidas de los cálculos de elementos finitos realizados en las probetas tipo placa ensayadas y el módulo  $m$ , coincidente con el parámetro de forma  $\beta$ , de la fdd de Weibull determinada a partir de los valores de resistencia experimentales en cada material, como se indica a continuación:

$$\sigma_{e,PIA} = (\sigma_I^m + \sigma_{II}^m + \sigma_{III}^m)^{1/m} \quad (7)$$

y determinar el área efectiva del ensayo de anillos concéntricos mediante la siguiente expresión [15]:

$$A_{ef} = 2\pi r_1^2 + 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[ \left( \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} \right)^m + \left( \frac{\sigma_t}{\sigma_{\max}} \right)^m \right] \cdot r dr \quad (8)$$

donde  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  son las tensiones radial y tangencial fuera del anillo de carga, respectivamente,  $\sigma_{\max}$  es la tensión biaxial máxima dentro del anillo de carga y  $r$  es el radio en coordenadas polares con origen en el centro de la probeta.

De esta forma, una vez reducido el ensayo biaxial a monoaxial, se puede aplicar la siguiente transformación a las tensiones de rotura de probetas con área efectiva distinta:

$$\sigma_{e(2)} = \sigma_{e(1)} \cdot \left( \frac{A_{ef(1)}}{A_{ef(2)}} \right)^{1/m} \quad (9)$$

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Aplicando el modelo probabilístico propuesto a los dos tipos de ensayos realizados, la tabla 2 recoge los parámetros de las fdd de Weibull estimadas directamente de los resultados experimentales y los valores de las áreas efectivas medias,  $A_{ef}$ , calculadas a partir de las determinadas en cada una de las 30 probetas ensayadas por material.

Para flexión a cuatro puntos el área efectiva de cada ensayo se calculó mediante la expresión (6) y la tensión de rotura alcanzada, mientras que para anillos concéntricos se utilizó la expresión (8) con los valores de las tensiones radial y tangencial resultantes del cálculo de elementos finitos realizado, aplicando los desplazamientos máximos obtenidos experimentalmente en cada probeta.

Las figuras 4 y 5 muestran las fdd de Weibull estimadas para los ensayos de flexión a cuatro puntos y de anillos concéntricos, respectivamente, y los tres tipos de vidrio estudiados. En ambas figuras, se representan conjuntamente las funciones primarias derivadas de la ecuación (1) para el valor de  $\Delta A = 100 \text{ mm}^2$ , adoptado en este trabajo, y las funciones deducidas de la ecuación (5) para el área efectiva media,  $A_{ef}$ , correspondiente a cada tipo de ensayo y material (ver tabla 2).

Tabla 2. Parámetros de Weibull y el área efectiva media para cada tipo de vidrio y ensayo.

Ensayo	$\beta$	$\lambda$ [MPa]	$\delta$ [MPa]	$R^2$	$A_{ef}$ [mm <sup>2</sup> ]
4P-A	4,31	19,77	190,14	0,976	105908
4P-H	6,74	49,12	265,56	0,965	95878
4P-T	3,71	152,50	277,41	0,962	84689
CS-A	3,69	44,80	423,17	0,972	5668
CS-H	6,46	73,24	404,17	0,985	5668
CS-T	3,37	171,90	616,80	0,963	5668

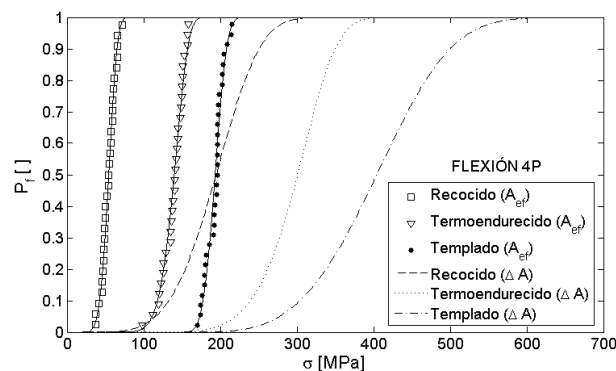


Figura 4. Función de distribución triparamétrica de Weibull para el ensayo de flexión a 4 puntos.

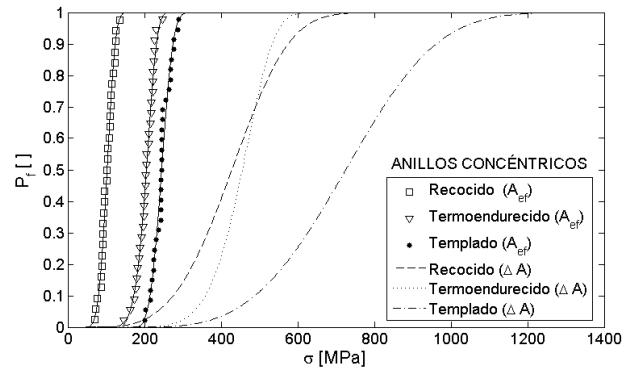


Figura 5. Función de distribución triparamétrica de Weibull para el ensayo de anillos concéntricos.

A continuación, para  $\Delta A = 100 \text{ mm}^2$  y cada tipo de vidrio ensayado las figuras 6, 7 y 8 representan las fdd de Weibull directas, es decir, estimadas a partir de los resultados de los ensayos de flexión a 4 puntos y de anillos concéntricos, denominadas 4P y  $CS_{PIA}$ , y las fdd de Weibull equivalentes, denominadas  $4P_{eq}$  y  $CS_{eq}$ , obtenidas tras aplicar la transformación (9) a las fdd  $CS_{PIA}$  y 4P, respectivamente.

Aunque de la transformación entre ensayos cabría esperar más coincidencia entre las distribuciones de Weibull directas y equivalentes, salvo en el caso del vidrio termoendurecido, las diferencias encontradas pueden deberse a la aplicación de un criterio de fallo, como PIA, no suficientemente adecuado al ensayo de anillos concéntricos.

Asimismo, analizando los valores de los parámetros de las tablas 3, 4 y 5 se pone de manifiesto que el parámetro de forma ( $\beta$ ) de las fdd de Weibull directa y equivalente coinciden prácticamente en todos los casos, con valores aproximados de 4 para el vidrio recocido, 6,5 para el vidrio termoendurecido y 3,5 para el vidrio templado, mientras que los parámetros de escala ( $\delta$ ) y de localización ( $\lambda$ ) difieren levemente. Estos valores diferenciados del parámetro  $\beta$  sugieren diferentes mecanismos iniciales de rotura en cada tipo de material, así como el elevado valor obtenido en el vidrio termoendurecido muestra una tendencia de su distribución al dominio de Gumbel.

Tabla 3. Parámetros de Weibull para vidrio recocido.

Recocido	$\beta$	$\lambda$ [MPa]	$\delta$ [MPa]	$R^2$	$A_{ef}$ [mm <sup>2</sup> ]
4P	4,31	19,77	190,14	0,976	105908
$CS_{PIA}$	3,69	44,80	423,17	0,972	5668
$4P_{eq}$	3,69	22,71	214,53	0,972	105908
$CS_{eq}$	4,31	38,94	374,77	0,976	5668

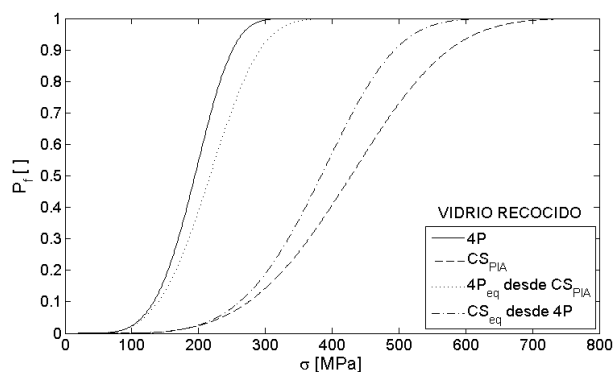


Figura 6. Función de distribución triparamétrica de Weibull para vidrio recocido.

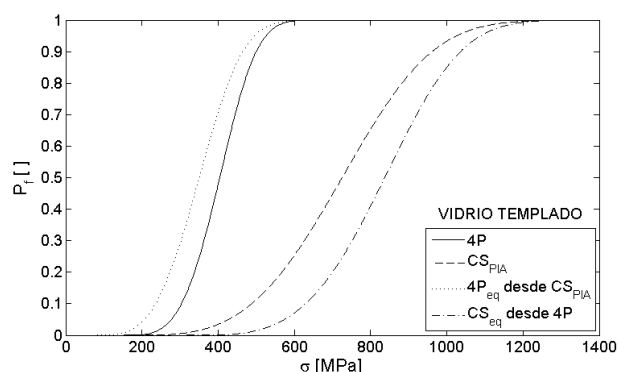


Figura 8. Función de distribución triparamétrica de Weibull para vidrio templado.

Tabla 4. Parámetros de Weibull para vidrio termoendurecido.

Termo-endurecido	$\beta$	$\lambda$ [MPa]	$\delta$ [MPa]	$R^2$	$A_{ef}$ [mm <sup>2</sup> ]
4P	6,74	49,12	265,5	0,965	95878
CS <sub>PIA</sub>	6,46	73,24	404,1	0,985	5668
4P <sub>eq</sub>	6,46	47,27	260,8	0,985	95878
CS <sub>eq</sub>	6,74	74,73	404,0	0,965	5668

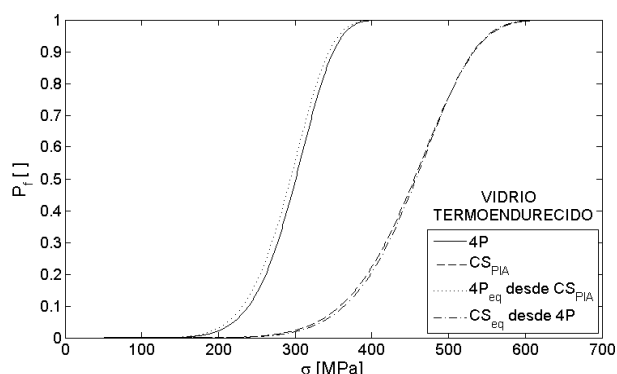


Figura 7. Función de distribución triparamétrica de Weibull para vidrio termoendurecido.

Tabla 5. Parámetros de Weibull para vidrio templado.

Templado	$\beta$	$\lambda$ [MPa]	$\delta$ [MPa]	$R^2$	$A_{ef}$ [mm <sup>2</sup> ]
4P	3,71	152,5	277,4	0,962	84689
CS <sub>PIA</sub>	3,37	171,9	616,8	0,963	5668
4P <sub>eq</sub>	3,37	82,96	297,8	0,963	84689
CS <sub>eq</sub>	3,71	316,1	575,0	0,962	5668

## 5. CONCLUSIONES

Del trabajo desarrollado se desprenden las siguientes conclusiones:

1. La metodología desarrollada pretende una caracterización probabilística de vidrio monolítico estructural con independencia del tipo de ensayo considerado.

2. La llamada función de distribución primaria triparamétrica de Weibull, referida a un área  $\Delta A$  tensionada uniaxialmente, junto con la aplicación de un criterio de fallo adecuado, permite determinar la probabilidad de rotura de un elemento de vidrio sometido a una distribución general de tensiones.

3. Las funciones de distribución de Weibull obtenidas directamente del ensayo de flexión a cuatro puntos y las deducidas por transformación del ensayo de anillos concéntricos muestran una buena coincidencia para el vidrio termoendurecido y una ligera discrepancia para los vidrios templado y recocido.

4. Los parámetros de forma ( $\beta$ ) de las distribuciones de Weibull muestran una razonable coincidencia para cada tipo de vidrio, adoptando valores aproximados de 4 para el vidrio recocido, 6,5 para el vidrio termoendurecido y 3,5 para el vidrio templado. Esto sugiere diferente mecanismo inicial de rotura, especialmente en el caso del vidrio termoendurecido que parece ajustarse mejor a una distribución de Gumbel.

5. A pesar de los resultados moderadamente satisfactorios, obtenidos con el modelo probabilístico aplicado, se considera necesario continuar la búsqueda de un criterio óptimo de rotura frágil bajo sollicitación biaxial, alternativo al Principio de Acciones Independientes (PIA).



## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación recibida de los Planes Nacional y Regional de Investigación, a través de los proyectos IB09-136, BIA2011-28959 y SV-PA-11-012, así como la beca FPI BES-2012-053159 concedida por el Ministerio de Economía y Competitividad.

## REFERENCIAS

[1] Lamela-Rey, M.J., Fernández-Canteli, A., García-Prieto, M.A., Castillo-Ron, E., Sanz-Ablanedo, E., García-Menéndez, M., *Probabilistic design model for glazing plates: a standard proposal for building*, *Glass Performance Days (GPD)*, pp. 581-583, Finland, 2007.

[2] Huerta, M.C., Pacios-Álvarez, A., Lamela-Rey, M.J., Fernández-Canteli, A., *Influence of experimental test type on the determination of probabilistic stress distribution*, *Glass Performance Days (GPD)*, pp. 371-377, Finland, 2011.

[3] Lamela, M.J., Fernández-Canteli, A., Przybilla, C., Menéndez, M., *Contrast of a probabilistic design model for laminated glass plates*, *Materials Science Forum*, pp. 730-732, Vol. 501-506, Trans Tech Publications Ltd (TTP), Switzerland, 2013.

[4] Huerta, M.C., Pacios, A., Germán, A., Lamela, M.J., Fernández-Canteli, A., Capel, F., *Improving with FEM the glass fracture stress obtained from coaxial double ring test*, *COST Action TU0905 Mid-Term Conference on Structural Glass*, pp. 189-196, Croatia, 2013.

[5] UNE-EN\_1288-3:2000, *Vidrio para la edificación. Determinación de la resistencia a flexión. Parte 3: ensayo con probetas soportadas en dos puntos (flexión a cuatro puntos)*, 2000.

[6] UNE-EN\_1288-5:2000, *Vidrio para la edificación. Determinación de la resistencia a flexión. Parte 5: Ensayos con anillos concéntricos dobles sobre probetas planas, con pequeñas superficies de sollicitación*, 2000.

[7] Weibull, W., *A Statistical Theory of the Strength of Materials*, *Proceedings of the Royal Swedish Institute of Engineering Research*, Nr. 151, 1939.

[8] Batdorf, S.B., Heinisch, H.L., *Weakest Link Theory Reformulated for Arbitrary Fracture Criterion*, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 61, 7-8, pp. 355-358, 1978.

[9] Weibull, W., *The Phenomenon of Rupture in Solids*, *Ing. Vetenskaps Akad. Handlingar*, 153, 1939.

[10] Barnett, R. L., Connors, C. L., Hermann, P. C., Wingfield, J. R., *Fracture of Brittle Materials Under*

*Transient Mechanical and Thermal Loading*, *US Air Force Flight Dynamics Laboratory*, AFFDL-TR-66-220, 1967.

[11] Freudenthal, A.M., *Statistical Approach to Brittle Fracture*, *Fracture*, vol. 2: *An Advanced Treatise, Mathematical Fundamentals*, H. Liebowitz, ed., Academic Press, pp. 1-30, 1968.

[12] Batdorf, S.B., Crose, J.G., *A Statistical Theory for the Fracture of Brittle Structures Subjected to Nonuniform Polyaxial Stresses*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, pp. 459-464, 1974.

[13] Evans, A.G., *A general approach for the Statistical Analysis of Multiaxial Fracture*, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 61, 7-8, pp. 302-308, 1978.

[14] Przybilla, C., Fernández-Canteli, A., Castillo, E., *Deriving the primary cumulative distribution function of fracture stress for brittle materials from 3- and 4- point bending tests*, *J. of European Ceramic Society*, Vol. 31 (4), pp. 451-460, 2010.

[15] Choi, S.R., Powers, L.M., Nemeth, N.N., *Slow crack growth behavior and life/reliability analysis of 96 wt % alumina at ambient temperature with various specimen/loading configurations*, Vol. 210206, NASA Technical Memorandum, 2000.